제 2 교시

Full Contest 2 모의고사 문제지

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

지금당장kicearena.com으로!

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ····· 1~8 쪽

○ 선택과목

미적분 ····· 9~12 쪽

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

KICE Arena

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. 실수 a에 대하여 $9^a = 27$일 때, 3^{a-1}의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $3\sqrt{3}$ ④ 9 ⑤ $9\sqrt{3}$

2. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1) = 3$일 때, $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{3h}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

3. 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12,$$
$$a_4 + a_5 + a_6 = 39$$

를 만족시킬 때, a_7의 값은? [3점]

① 10 ② 13 ③ 16 ④ 19 ⑤ 22

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax - 2}{x - 2} & (x \neq 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 다항함수 $f(x)$가

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3, \qquad \int_2^3 f(x)\,dx = -1$$

을 만족시킬 때, $\int_0^3 (2f(x)+1)\,dx$의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

6. 좌표평면에서 x축의 양의 방향을 시초선으로 하는 각 θ를 나타내는 동경이 점 $(-3, 4)$를 지날 때, $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ 2

7. 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 1$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2 = -6, \qquad a_5 = 48$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$의 값은? [3점]

① -45 ② -15 ③ 9 ④ 15 ⑤ 45

9. 양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2+ax+2$ 위의 점 $(1, a+3)$에서의 접선이 곡선 $y=-x^2+6x-3$에도 접할 때, a의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10. 삼각형 ABC의 변 AC 위의 점 D가

$$\overline{AB}=9,\quad \overline{BC}=\overline{BD}=6,$$

$$\sin(\angle ABD)=2\sin(\angle DBC)$$

를 만족시킬 때, $\overline{AC}^2$의 값은? (단, 점 D는 두 점 A, C와 다르다.) [4점]

① 60 ② 80 ③ 100 ④ 120 ⑤ 140

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = a(t-1)(t-3)$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리가 12일 때, 시각 $t=2$에서 점 P의 속력은? (단, a는 양수이다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{15}{2}$

12. 부등식

$$\log_{x-2}(4-x) + \log_{x-2}(5-x) \leq 2$$

를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위가 $a < x < b$ 또는 $c \leq x < d$ 일 때, $a+b+c+d$의 값은? [4점]

① $\frac{59}{5}$ ② $\frac{61}{5}$ ③ $\frac{63}{5}$ ④ 15 ⑤ $\frac{67}{5}$

13. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 어떤 자연수 m에 대하여

$$S_m = 5, \quad S_{2m} = 85,$$
$$|a_m| + |a_{m+1}| = 24$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{2m} |S_k|$의 값은? [4점]

① 130 ② 150 ③ 170 ④ 190 ⑤ 210

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가

$$f(0) = f(2) = 0, \qquad \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{11}{15}$$

을 만족시킨다. 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 48 ② 54 ③ 60 ④ 66 ⑤ 72

15. 양수 a와 $0 \le b < 2\pi$인 실수 b에 대하여 함수

$$f(x) = \sin(\pi a x + b)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0) = f(4) = f(12) > 0$이고 $f(20) = -1$이다.
> (나) 열린구간 $(0, 4)$에서 방정식
>
> $$f(x) = f(2x+1)$$
>
> 의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

열린구간 $(0, 4)$에서 두 방정식

$$f(x) = f(2x+1),$$
$$f(x) = f(4x+3)$$

을 동시에 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수를 N이라 하자. 가능한 모든 N의 값의 합은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

단답형

16. 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$가 $f(1) = 3$과 $f'(2) = 7$을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

17. 양수 a, b가

$$\log_2 a = 3, \qquad \log_a b = 2$$

를 만족시킬 때, $\log_2(ab)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n = n^2 + 2n$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 곡선 $y = x^2 - 4x + 3$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $3(S_1 + S_2)$의 값을 구하시오. [3점]

20. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$4\int_0^x f(t)\,dt = 4xf(x) - 3x^4 + 8x^3$$

을 만족시킨다. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 1일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

21. 자연수 n에 대하여 두 수

$$\log_4\left(\frac{3}{n+3}\right), \qquad \log_8\left(\frac{3}{n+3}\right)$$

중 오직 하나만 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 α를 갖고 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이 함수는 $f(-1)=-1$을 만족시킨다. 실수 t에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=t, \qquad a_{n+1}=f(a_n) \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

로 정의하자. $a_5=-1$이 되도록 하는 서로 다른 실수 t의 개수가 35일 때, $f(\alpha)$의 값을 구하시오. [4점]

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+n}+n}{3n-1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 3

24. 함수 $f(x)=\frac{e^{2x}}{x+1}$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

25. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 2$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

26. 다음 명제 A, B, C, D, E 중 옳지 않은 것의 개수는? [3점]

A. 수열 $\{a_n\}$이 0으로 수렴하고, 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $|b_n| \le M$을 만족시키도록 하는 양수 M이 존재하면, 수열 $\{a_n b_n\}$은 0으로 수렴한다.

B. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$이 수렴하면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

C. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 가지면, 함수 $g(x)$도 그 정의역 전체에서 미분가능하다.

D. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\cos x\, dx = 0$$

이다.

E. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx = \left| \int_0^1 f(x)\, dx \right|$$

를 만족시키면, $[0,1]$의 모든 x에서 $f(x) \ge 0$이거나 $[0,1]$의 모든 x에서 $f(x) \le 0$이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

27. 다음은 함수의 그래프에 관한 명제를 증명하는 과정이다.

> 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
>
> $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)}{2}+\frac{f(x_2)}{2}$$
>
> 를 만족시키면, 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이다.

> 실수 a를 임의로 정하고 $h>0$이라 하자. 주어진 조건에 $x_1=a-h$, $x_2=a+h$를 대입하면
>
> $$2f(a) \le f(a-h)+f(a+h)$$
>
> 이다. 함수 $f(x)$에 평균값 정리를 적용하면 $a-h<u<a<v<a+h$이고
>
> $$f'(u)=\frac{f(a)-f(a-h)}{h},$$
> $$f'(v)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> 인 두 실수 u, v가 존재한다. 따라서 $f'(u)$ [(가)] $f'(v)$이다. 이제 함수 $f'(x)$에 평균값 정리를 적용하면 $u<c<v$이고
>
> $$\boxed{(\text{나})}=\frac{f'(v)-f'(u)}{v-u}$$
>
> 인 실수 c가 존재한다. $a-h<c<a+h$이므로 $\lim_{h\to 0+} c=a$이다. 이계도함수 $f''(x)$가 a에서 연속이므로
>
> $$f''(a)=\lim_{h\to 0+} f''(c)\ \boxed{(\text{다})}\ 0$$
>
> 이다. a는 임의의 실수이므로, 함수 $f(x)$의 그래프는 실수 전체에서 아래로 볼록이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\le$	$f'(c)$	$\ge$
②	$\le$	$f''(c)$	$\le$
③	$\ge$	$f'(c)$	$\ge$
④	$\le$	$f''(c)$	$\ge$
⑤	$\ge$	$f''(c)$	$\le$

28. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x e^t f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [4점]

> (가) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$
> (나) 함수 $|g(x)|$가 미분가능하지 않은 실수 x는 1뿐이다.

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_nS_{n+1}-1)=-\frac{4}{3}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]

30. $0<a<\frac{\pi}{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}a-|x| & (|x|\le a),\\ 0 & (|x|>a)\end{cases}$$

라 하자. 자연수 n에 대하여

$$A_n=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos nx\,dx$$

라 할 때, $A_2+4A_4=0$이다. $A_n=0$을 만족시키는 60 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마십시오.