PROBLEM 01

1점

1번 문제

모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

$$\boxed{-e^{-x+1} \le ax + b \le \frac{1}{2}e^{2x-2}}$$

$$|M^2 m^3| = \frac{p}{q}$$

일때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 양의 정수이다.)

PROBLEM 02

1점

2번 문제

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 부등식 $|f(x)| \le t$의 해가 이루는 구간들의 길이의 합을 $L(t)$라 하자. 해가 없으면 $L(t) = 0$으로 정한다.

$$\lim_{t \to 1-} \frac{L(1) - L(t)}{\sqrt{1-t}} = 2$$

이고, 방정식 $f(x) = 3$의 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha < \beta)$가

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\, dx = 4$$

를 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

PROBLEM 03

1점

3번 문제

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다.

모든 실수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{f(x)-f(x-t)}$$

의 값이 존재하도록 하는 양수 t의 집합이

$$\{k\} \cup \{t \mid t>4\}$$

이다.

$0<k<4$일 때, 가능한 모든 $f(1)$의 값의 합을 구하시오.

PROBLEM 04

1점

4번 문제

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0), \\ f(x)-ax^2 & (x>0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)-x$는 실수 전체에서 증가한다. 곡선 $y=g(x)$ 위에서 접선의 기울기가 1인 점은 서로 다른 두 점이고, 이 두 점의 y좌표 중 최댓값과 최솟값의 차는 20이다. $f(3)$의 값을 구하시오.

PROBLEM 05

1점

5번 문제

모든 항이 양의 정수인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 20, \qquad a_2 = 21, \qquad a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

을 만족시킨다. $n \geq 2$인 정수 n에 대하여

$$b_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

라 하자.

b_n이 최솟값을 갖도록 하는 양의 정수 n이 7뿐일 때,

$$\sum_{k=1}^{7} a_k$$

의 최댓값을 구하시오.