PROBLEM 01

1번 문제

1점

두 함수

$$f(x) = \log_9(2x - 5) + 1, \qquad g(x) = 3^x + 3$$

에 대해, $f(x)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점을 $A(a, b)$라 하고,

$g(x)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점을 B라 하자.

점 A를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점을 P라 했을때, $0 < b < 2$이고 세 점 $(2, 2)$, P, B가 한 직선 위에 있다. 직선 AB의 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$일 때, $a \times b$의 값을 구하시오.

PROBLEM 02

1점

2번 문제

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$$

을 만족시킨다. 양의 정수 n에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$$

라 하자. 두 수열은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{S_n\}$이 최솟값을 갖는 n의 값은 2와 3이다.

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{11}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{p}{q}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 양의 정수이다.)

PROBLEM 03

1점

3번 문제

자연수 n과 $0 \le k \le n$인 정수 k에 대하여, 방정식

$$x^3 + 3x = \frac{4k}{n}$$

의 유일한 실근을 $x_{n,k}$라 하자.

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} (x_{n,k} - x_{n,k-1})^2$$

의 값을 α라고 할 때, $\frac{\pi}{\alpha}$의 값을 구하시오.

PROBLEM 04

1점

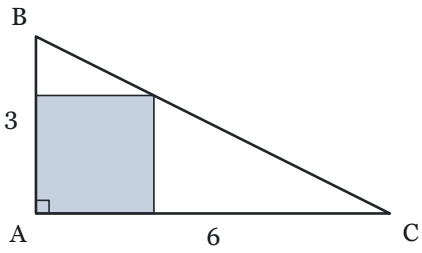
4번 문제

$\angle BAC = \dfrac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 6$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 한 꼭짓점으로 하고 두 변이 각각 선분 AB, AC 위에 놓이며, 점 A의 맞은편 꼭짓점이 선분 BC 위에 놓이는 정사각형을 그린다. 이 정사각형의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 〔그림 1〕이라 하자.

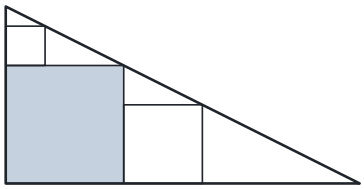
매 단계에서 새로 그린 각 정사각형을 제외하고 남은 두 직각삼각형 각각에 위와 같은 방법으로 정사각형을 그린다. 홀수 번째 단계에 새로 그린 정사각형의 내부만 색칠하고, 짝수 번째 단계에 새로 그린 정사각형의 내부는 색칠하지 않는다. n번째 단계를 마친 그림을 〔그림 n〕이라 하고, 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 하자.

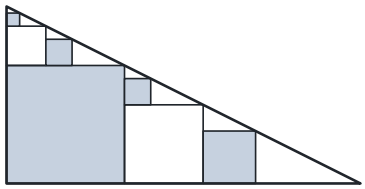
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{p}{q}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 양의 정수이다.)



[그림 1]


[그림 2]


[그림 3]

PROBLEM 05

1점

5번 문제

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(g(x)) = 2\cos x$$

를 만족시킨다. $g(0) = 2$, $g(3\pi) = -2$일 때,

$$5 \times \int_0^{5\pi} \left(g(x)\right)^2 \sin x \, dx$$

의 값을 구하시오.