PROBLEM 01

1번 문제

1점

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$$

을 만족시킨다. 모든 양의 정수 n에 대하여

$$a_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right)$$

일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n a_{n+1} = \frac{p}{q}$$

이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 양의 정수이다.)

PROBLEM 02

1점

2번 문제

두 실수 a, b가 $a > 1$, $0 < b < 1$을 만족시킨다. 닫힌구간 $[1, a^4]$에서 방정식

$$\sin(\pi \log_a x) = b$$

의 서로 다른 네 실근을 작은 것부터 차례로 k_1, k_2, k_3, k_4라 하자.

$$k_1 k_2 k_3 k_4 = 2^{12}, \qquad 2(k_1 + k_3) = k_2 + k_4$$

일 때, $a + 4b^2$의 값을 구하시오.

PROBLEM 03

1점

3번 문제

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가

$$f(0) = f'(0) = 0$$

을 만족시킨다. 기울기가 12인 직선 ℓ이 곡선 $y = f(x)$에 서로 다른 두 점에서 접하고, 직선 ℓ과 곡선 $y = f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\dfrac{1}{30}$이다. $f(3)$의 값을 구하시오.

PROBLEM 04

1점

4번 문제

양의 정수 d와 첫째항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 양의 정수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n > 0), \\ a_n + d & (a_n \le 0) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 이 수열이

$$a_6 = a_{11}, \qquad \sum_{n=1}^{10} a_n = 25, \qquad \sum_{n=1}^{20} a_n = 30$$

을 만족시킬 때, $d + 2a_1$의 값을 구하시오.

PROBLEM 05

1점

5번 문제

실수 전체에서 정의된 함수

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자. 양수 a가 $g'(a) = e^{-4}$를 만족시킬 때,

$$\int_0^a g(x)\big(g'(x)\big)^2\, dx = \frac{p - e^{-q}}{r}$$

일때, $p + q + r$ 의 값을 구하시오. (단, p, q, r 은 모두 양의 정수이다.)

PROBLEM 06

1점

6번 문제

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 사차함수 $f(x)$가 있다.

모든 실수 t에 대하여

$$\lim_{x \to t} \frac{f(x^2)}{\{f(x)\}^2}$$

가 존재하고, 그 값을 $g(t)$라고 할 때,

함수 $g(t)$가 최댓값을 갖는 서로 다른 실수 t의 개수는 2이고, 이 두 실수의 합은 5이다. $f(2)$의 값을 구하시오.